

# 12. Helmholtzov kolotoč

Richard Hlubina

FMFI UK, Bratislava

Úvodné sústreďenie TMF, Bratislava, 26.10.2012

# Zadanie

Pripevnite vianočné gule na kolotoč s nízkym trením tak, aby diera v každej guli smerovala po dotyčnici k smeru pohybu kolotoča. Ak zariadenie vystavíte zvuku vhodnej frekvencie a intenzity, kolotoč sa začne otáčať. Vysvetlite jav a nájdite hodnoty parametrov, pri ktorých sa kolotoč točí najrýchlejšie.

# Fyzikálny mechanizmus

zákon zachovania (momentu) hybnosti:

ak sa gule začnú hýbať, museli udeliť okolitému vzduchu hybnosť (reaktívny pohon)

nositeľ hybnosti vo vzduchu:

zvuk?

usmernený tok vzduchu?

???

nutná podmienka vzniku pohybu: hybná sila  $>$  trenie

trenie: o vzduch? o os kolotoča?

# Popis zvukovej vlny

zvuková vlna je moduláciou koncentrácie  $n = n(x, t)$  v priestore a čase (rovinná vlna v smere šíriaca sa v smere osi  $x$ )

častice kmitajú v smere šírenia vlny, t.j. v smere osi  $x$ , s (v danom bode priestoru a čase) priemernými rýchlosťami  $v = v(x, t)$

funkcie  $n(x, t)$  a  $v(x, t)$  nie sú nezávislé, ale spĺňajú rovnicu

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$n_0$  je koncentrácia v plyne bez zvuku; rovnica zohľadňuje fakt, že častice pri kmitaní nevznikajú a nezanikajú, ale sa iba premiestňujú v priestore

# Hybnosť zvukovej vlny

nech koncentrácia častíc osciluje v čase a priestore okolo hodnoty  $n_0$  podľa vzťahu

$$n(x, t) = n_0 + An_0 \cos(x - v_s t)$$

kde  $A \ll 1$  je bezrozmerné číslo a  $v_s$  je rýchlosť zvuku

potom funkcia  $v(x, t)$  musí mať tvar  $v(x, t) = Av_s \cos(x - v_s t)$

potom hybnosť pripadajúca na jednotkový objem plynu je  $\Pi(x, t) = mn(x, t)v(x, t)$ , kde  $m$  je hmotnosť častíc

zaveďme hustotu hmotnosti  $\rho = mn_0$ ; po ustrednení cez čas dostávame

$$\overline{\Pi(x)} = A^2 \rho v_s \overline{\cos^2(x - v_s t)} = \frac{1}{2} A^2 \rho v_s$$

**teda zvuková vlna nesie nenulovú hustotu hybnosti**

vzťah s (časovo ustrednenou) hustotou energie  $\overline{E(x)}$  vo vlně:

$$\overline{E(x)} = v_s \overline{\Pi(x)}$$

# Čo je zdrojom zvuku?

ak gule odovzdávajú hybnosť vzduchu, potom gule musia pôsobiť ako zdroje zvuku s anizotrópnym vyžarovaním

2 možnosti:

- a) dominantne kmitá samotná nádoba
- b) dominantne kmitá vzduch v nádobe

možnosť a) nepravdepodobná (takmer izotrópne vyžarovanie)  
ako ju možno vyvrátiť?

možnosť b) silno anizotrópna (Helmholtzov rezonátor)

# Helmholtzov rezonátor

hmotnosť vzduchu v hrdle fľaše  $m = \rho LS$

táto “zátka” osciluje s frekvenciou  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$

tuhosť určená objemovou pružnosťou vzduchu vo fľaši; prírastok sily  $\Delta F$  pri posunutí  $\Delta x$  zátky:

$$\Delta F = -K\Delta x \text{ alebo } \Delta p = -\frac{K}{S^2} \Delta V_0$$

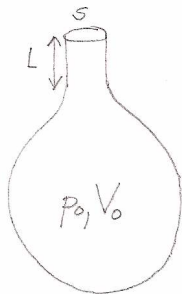
$$\text{preto } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{\rho L} \left( -\frac{\Delta p}{\Delta V_0} \right)} \text{ alebo } f = \frac{v_s}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V_0 L}}$$

kde  $v_s \sim 340$  m/s je rýchlosť zvuku vo vzduchu

rádový odhad pre vianočné gule:

$$S \sim 0.5 \text{ cm}^2, L \sim 0.5 \text{ cm}, V_0 \sim 0.2 \text{ l}$$

$$\text{teda } f \sim 300 \text{ Hz}, \lambda = v_s/f \sim 1 \text{ m}$$



# Elektromagnetický analóg kolotoča

el-mag teória: aj svetlo nesie hybnosť;  
hybnosť fotónu označme  $p$

fotóny dopadajúce na čiernu lopatku jej udelia  
hybnosť  $p$

fotóny dopadajúce na zrkadlo mu udelia hybnosť  
 $p - (-p) = 2p$

predpoveď teórie: veterník sa roztočí

experiment: 3 oblasti tlakov vzduchu v banke

vysoké tlaky (slabé vákuum): veterník stojí, veľké  
trenie

**stredné tlaky (stredné vákuum): veterník sa hýbe  
oproti predpovedi el-mag teórie!**

nízke tlaky (dobré vákuum): veterník sa hýbe podľa  
predpovede el-mag teórie

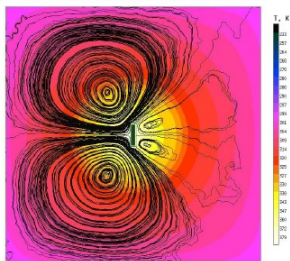


(wikipédia)

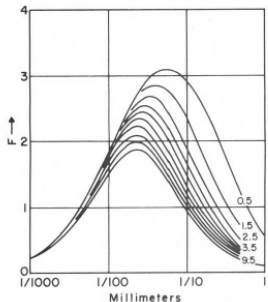


# Rádiometrické sily

nesúlad pri stredných vákuách: čierna lopatka sa zahrieva, teplotné gradienty generujú tepelné toky a následne (veľmi komplikovaným spôsobom) aj mechanické pôsobenie na veterník



obtekanie doštičky s teplou ľavou stranou a studenou pravou stranou (numerická simulácia, N. Selden et al)



experimentálna závislosť sily na veterník od tlaku (v logaritmickej škále, podľa Brueche and Littwin)

# Rádiometrické sily?

sú v akustickom kolotoči rádiometrické sily relevantné?

roztočí sa kolotoč aj pri neakustickom zahriatí gúľ?

stúpne vôbec teplota gúľ?

preveriť experimentálne

# Tlačná sila Helmholtzovho motora

celková hybnosť zvuku v zátke:  $P = SL\bar{p}$

hybnosť  $P$  sa odovzdá vzduchu za čas  $\tau = L/v_s$

tlačná sila na guľu:

$$F = \frac{P}{\tau} = \frac{1}{2} A^2 \rho v_s^2 S$$

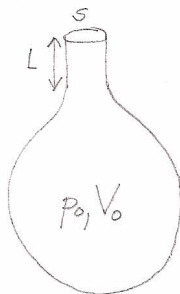
trenie gule s polomerom  $R$  pri rýchlosti  $v$ :

$$F_{\text{trenie}} = 6\pi\mu Rv$$

kde  $\mu$  je dynamická viskozita vzduchu

maximálna dosiahnuteľná rýchlosť daná  $F = F_{\text{trenie}}$ :

$$v_{\text{max}} = \frac{A^2}{12\pi} \frac{\rho v_s^2}{\mu} \frac{S}{R}$$



# Maximalizácia rýchlosti otáčania

voľné parametre úlohy:

geometrické rozmery  $S$ ,  $L$ ,  $R$ , materiál a hrúbka gúľ (obmedzené)

frekvencia a intenzita zvuku, umiestnenie zdroja

teplota, tlak a chem. zloženie vzduchu (??)

literatúra považuje nelineárne efekty a tlmenie za dôležité (overiť)

preto: preskúmať spektrum generovaného zvuku (pri harmonickom budení)  
pre jeden fixný Helmholtzov rezonátor, skúmať zmeny pri zmene intenzity a  
(malých) zmenách frekvencie budenia, prípadne ďalšie veličiny  
charakterizujúce výstup rezonátora